H20 京工繊 物理 4回目

I

(a) 質点が静止しているときのばねの長さを l とする。

このとき質点に働く力はつり合っているので

$$k_1(l-l_0)=mg+k_2(l-l_0)$$

$$(k_1-k_2)(l-l_0)=mg \quad —①$$

となり、右辺は正なので

$$(k_1-k_2)(l-l_0)>0$$

となり $l-l_0$ は今、正なので

$$k_1-k_2>0$$

$$k_1>k_2$$

となる。

(b) 前問①式より

$$(k_1-k_2)(l-l_0)=mg$$

$$l-l_0=\frac{mg}{k_1-k_2}$$

$$l=\frac{mg}{k_1-k_2}+l_0$$

となる。

(c) ばね定数 k_1 のばねの伸びは

$$l-l_0-x$$

でありばね定数 k_2 のばねの伸びは

$$l-l_0+x$$

となる。今鉛直上向きを正とすると合力の大きさは

$$|k_1(l-l_0-x)-mg-k_2(l-l_0+x)|=\left|k_1\left(\frac{mg}{k_1-k_2}-x\right)-mg-k_2\left(\frac{mg}{k_1-k_2}+x\right)\right|$$

$$=|-(k_1+k_2)x|$$

$$=(k_1+k_2)x$$

となり向きは鉛直下向き

(d) 前問より

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-(k_1+k_2)x$$

となる。

(e) $\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ とおくと質点の運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$

$$\therefore x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

と解けるが周期Tは

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

となる。但し C_1, C_2 は定数。

回

(a)

質量中心の運動方程式を

$$\mu \frac{d^2 \mathbb{R}}{dt^2} = \mathbb{F}_R$$

と置く。ここで μ は質量中心の質量，$\mathbb{F}_R$ は質量中心にかかる力である。

今，$\mathbb{R}$ が分かっているので $\frac{d^2\mathbb{R}}{dt^2}$ は

$$\frac{d^2 \mathbb{R}}{dt^2} = \frac{1}{m_A + m_B}\left(m_A \frac{d^2 \mathbb{r}_A}{dt^2} + m_B \frac{d^2 \mathbb{r}_B}{dt^2}\right)$$

$$(m_A + m_B)\frac{d^2 \mathbb{R}}{dt^2} = \mathbb{F}_A + \mathbb{F}_B$$

となるから，$\mu = m_A + m_B$，$\mathbb{F}_R = \mathbb{F}_A + \mathbb{F}_B$ となり示すべき式が示せた。

(b) $\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \mathbb{F}$

(c) $\mathbb{F}_A$ と $\mathbb{F}_B$ は内力であるから作用反作用の法則より

$$\mathbb{F}_A + \mathbb{F}_B = \mathbb{O}$$

となる。ここで $\mathbb{O}$ はベクトル量を持った零である。

よって(a)で求めた運動方程式は

$$(m_A + m_B)\frac{d^2 \mathbb{R}}{dt^2} = \mathbb{O}$$

$$m_A \frac{d^2 \mathbb{r}_A}{dt^2} + m_B \frac{d^2 \mathbb{r}_B}{dt^2} = \mathbb{O}$$

$$\frac{d\mathbb{P}_A}{dt} + \frac{d\mathbb{P}_B}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{P}_A + \mathbb{P}_B) = \mathbb{O}$$

$$\mathbb{P}_A + \mathbb{P}_B = \mathbb{C} \neq f(t)$$

となる。よって全運動量 $\mathbb{P}_A + \mathbb{P}_B$ は時間に依存しない。

但し，$\mathbb{C}$ は定数ベクトルである。

四

(a)
まず、領域1における電場の大きさを求める。
閉曲面を高さl、半径$a \leq r \leq c$の円筒S_1とし、電場の大きさをE_1とする。
ガウスの法則より

$$\int_{S_1} E_1 dS = \frac{\xi l}{\varepsilon_1}$$

$$l\, 2\pi r E_1 = \frac{\xi l}{\varepsilon_1} \quad \text{(※円柱端での乱れを無視)}$$

$$E_1 = \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_1 r}$$

となる。
次に領域2における電場の大きさを求める
閉曲面を前述の円筒の半径を$c < r \leq b$にしたS_2とし、電場の大きさをE_2とする。
ガウスの法則より

$$\int_{S_2} E_2 dS = \frac{\xi l}{\varepsilon_2}$$

$$l\, 2\pi r E_2 = \frac{\xi l}{\varepsilon_2}$$

$$E_2 = \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

となる

(b) まず、領域2の電位$V_2(r)$は

$$V_2(r) = -\int_{\infty}^{r} E_2 dr$$

と書けるが、今、外部電極の電位は零なので

$$V_2(r) = -\int_{b}^{r} \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2 r} dr$$

$$= \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2} \ln\left|\frac{b}{r}\right| \qquad (c < r \leq b)$$

となる。
次に領域1の電位$V_1(r)$は

$$V_1(r) = -\int_{c}^{r} E_1 dr + V_2(c)$$

$$= -\int_{c}^{r} \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_1 r} dr + \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2} \ln\left|\frac{b}{c}\right|$$

$$= \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_1} \ln\left|\frac{c}{r}\right| + \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2} \ln\left|\frac{b}{c}\right| \qquad (a \leq r \leq c)$$

(c) $\phi = V_1(a) - \cancel{V(c)}$ ← 外部電極 $=0$　　$V_1(a)$

$$= \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_1} \ln\left|\frac{c}{a}\right| + \frac{\xi}{2\pi\varepsilon_2} \ln\left|\frac{b}{c}\right|$$

(d) $l\xi = C\phi$

$$C = 2\pi\varepsilon_1 l \ln\left|\frac{c}{a}\right|.$$