H24 千葉 数学 2回目

問1

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2) $L=\lim_{x\to +0}x^x$ とおくと

$\log L=\lim_{x\to +0}x\log x$

$=\lim_{x\to +0}\dfrac{\log x}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to +0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$=-\lim_{x\to 0}x=0$

$\therefore L=1$

より

$\lim_{x\to +0}x^x=1$

問2

(1) λを定数としてAの固有多項式は

$|A-\lambda E|=0$

$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$(-1-\lambda)(2-\lambda)-4=0$

$-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2-4=0$

$\lambda^2-\lambda-6=0$

$(\lambda-3)(\lambda+2)=0$

$\therefore \lambda=-2,3$

より固有値は$-2,3$の2つ.

(2)

$\lambda=-2$のときの固有ベクトルを

$\mathbb{P}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$

としてEを2次の単位行列, $\mathbb{O}$を2行1列の零行列とする

$A\mathbb{P}_1=-2\mathbb{P}_1$

$(A+2E)\mathbb{P}_1=\mathbb{O}$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\therefore x_1+2y_1=0$

より

$\mathbb{P}_1=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y_1\\ y_1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

となる。但し, k_1は零でない任意定数である。

ベクトル$\mathbb{P}_1$の大きさが1になるようなk_1を決めると

$\sqrt{(-2k_1)^2+k_1^2}=1$

$\sqrt{5}|k_1|=1$

$|k_1|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

となるから$k_1>0$の方を今回選択するとベクトル$\mathbb{P}_1$は

$\mathbb{P}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

となる。

次に$\lambda=3$のときの固有ベクトルを

$\mathbb{P}_2=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$

とすると

$A\mathbb{P}_2=3\mathbb{P}_2$

$(A-3E)\mathbb{P}_2=\mathbb{O}$

$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$\therefore -2x_2+y_2=0$

より

$\mathbb{P}_2=\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ 2x_2\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

但し, k_2は零でない任意定数である。

$\mathbb{P}_2$の大きさが1であることより

$\sqrt{k_2^2+(2k_2)^2}=1$

$|k_2|\sqrt{5}=1$

$|k_2|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

となる。今, $k_2>0$の方を選択するとベクトル$\mathbb{P}_2$は

(3) 行列Pは

$$P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2)$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。行列Pの

$$\det(P)=-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=-1\neq 0$$

より正則であるから逆行列Pが存在する。逆行列P^{-1}は

$$P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

よりPP^{-1}は

$$PP^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+1 & 0 \\ 0 & 4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる

また$P^{-1}P$は

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。また

P^{-1}は行列Pの転置${}^tP$と同じなので

行列Pは直交行列となる

)

$$P^{-1}AP=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問3

(1) $y' + y + y^2 = 0$

$$y' = -y^2 - y$$

$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = -\int dx$$

左辺被積分関数を部分分数分解すると

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{(A+B)y + A}{y(y+1)} = \frac{1}{y(y+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\therefore A=1$$
$$B=-1$$

$$\therefore \frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

となるから

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -\int dx$$

$$\ln|y| - \ln|y+1| = -x + C_1 \quad (C_1\text{は定数})$$

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = -x + C_1$$

$$\frac{y}{y+1} = \pm e^{-x+C_1}$$

$C_2 = \pm e^{C_1}$ とおくと

$$\frac{y}{y+1} = C_2 e^{-x}$$

となる。$x=0$ のとき $y(0)=1$ より

$$\frac{1}{1+1} = C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2}$$

より

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

また、$y=-1$ のとき上の解は与式を満たさないが、与式の解は

$$\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2}e^{-x} \ (y \neq -1) \text{ 及び } y=-1$$

となる。

(2) $y' + y = 0$ として①式とおく。

①式の一般解は

$$y' + y = 0$$

$$y' = -y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int dx$$

$$\ln|y| = -x + C_3 \quad (C_3\text{は定数})$$

$$y = \pm e^{-x+C_3}$$

$C_4 = \pm e^{C_3}$ とすると

$$y = C_4 e^{-x}$$

となる。

次に与式の一般解を求める。

①式の一般解

$$y = C_4 e^{-x}$$

の C_4 を x の関数 $C_4(x)$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}C_4 + e^{-x}\frac{dC_4(x)}{dx}$$

となるのでと与式に代入すると

$$-e^{-x}C_4 + e^{-x}\frac{dC_4(x)}{dx} + C_4(x)e^{-x} + x =$$

$$e^{-x}\frac{dC_4(x)}{dx} = -x$$

$$C_4(x) = -\int x e^{x}\,dx$$

$$= -xe^{x} + \int e^{x}\,dx + C_5$$

$$= -xe^{x} + e^{x} + C_6$$

$$= (1-x)e^{x} + C_6$$

となるので与式の一般解は

$$y = \{(1-x)e^{x} + C_6\}e^{-x}$$

$$= 1 - x + C_6 e^{-x}$$

となる。$x=0$ のとき $y(0)=2$ より C_6 を決定する

$$2 = 1 + C_6$$

$$C_6 = 1$$

より

$$y = 1 - x + e^{-x}$$

394

(1) 積分領域Dは問題より

$$D=\{(x,y) \mid (x^2+y^2)^2 \le y^2-x^2,\ y \ge 0\}$$

であった。

これを極座標に変換すると

$$D=\{(r,\theta) \mid r^4 \le r^2\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta,\ r\sin\theta \ge 0\}$$

$$=\{(r,\theta) \mid r^4 - r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \le 0,\ r\sin\theta \ge 0\}$$

$$=\{(r,\theta) \mid r^2 - \sin^2\theta + \cos^2\theta \le 0,\ \sin\theta \ge 0,\ r \ge 0\}$$

$$=\{(r,\theta) \mid r^2 \le \sin^2\theta - \cos^2\theta,\ 0 \le \theta \le \pi,\ r \ge 0\}$$

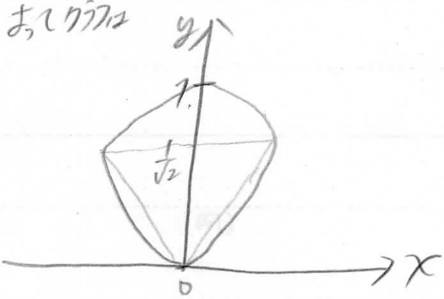
$$=\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le \sqrt{1-2\cos^2\theta},\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi\}$$

となる。

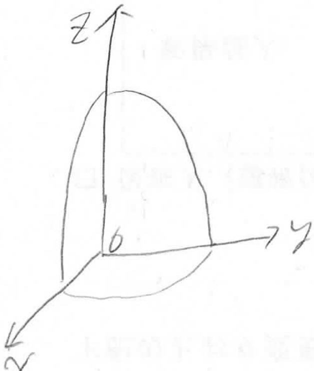
θを変化させたときのrは

θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$
r	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

よってグラフは



(2)



(3) 被積分関数は

$$\sqrt{1-r^2}$$

と書けヤコビアンJは

$$J=r$$

より

$$I=\iint_D \sqrt{1-r^2}\,|r|\,dr\,d\theta$$

$$=\iint_D r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left\{ \int_0^{\sqrt{1-2\cos^2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\, dr \right\} d\theta$$

こで $t = 1-r^2$ とおくと

$\frac{dt}{dr} = -2r$ ∴ $-\frac{1}{2}dt = r\,dr$

r	$0 \to \sqrt{1-2\cos^2\theta}$
t	$1 \to 2\cos^2\theta$

ので I は

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left\{ \int_1^{2\cos^2\theta} \sqrt{t}\, dt \right\} d\theta \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^{2\cos^2\theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(2\sqrt{2}\cos^2\theta\cdot|\cos\theta| - 1\right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sqrt{2}\cos^3\theta)\, d\theta + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\sqrt{2}\cos^3\theta\, d\theta + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}\cos^3\theta\, d\theta + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta + \frac{1}{6}\pi$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta + \frac{1}{6}\pi$$

で 左辺の積分において $\alpha = \sin\theta$ とおくと

$\frac{d\alpha}{d\theta} = \cos\theta$ ∴ $d\alpha = \cos\theta\, d\theta$

θ	$\frac{\pi}{4} \to \frac{\pi}{2}$
α	$\frac{1}{\sqrt{2}} \to 1$

り

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1-\alpha^2)\, d\alpha + \frac{1}{6}\pi$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\alpha - \frac{1}{3}\alpha^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} + \frac{1}{6}\pi$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{3} + \frac{1}{6}\pi$$

$$= \frac{-16+4\sqrt{2}}{9} + \frac{1}{6}\pi$$